Eletromagnetismo I

Cap. 2: Eletrostática

2.4: Trabalho e energia na eletrostática

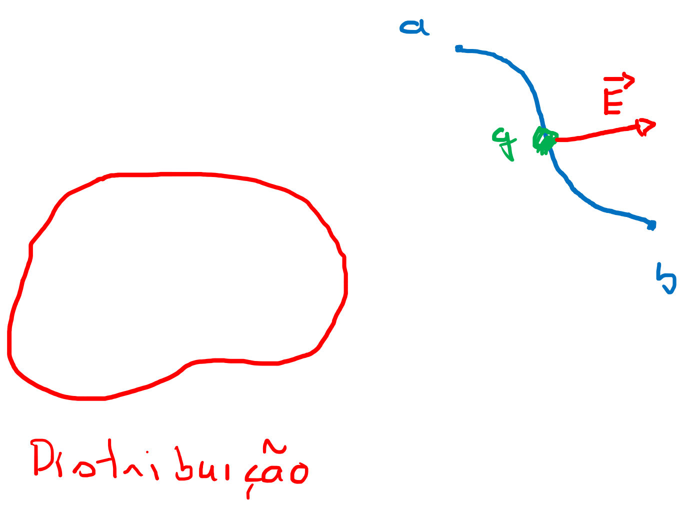
Prof. Marcos Menezes

Instituto de Física - UFRJ

2.4 – Trabalho e energia na eletrostática

2.4.1 – Trabalho para deslocar uma carga de teste puntiforme

- Considere uma distribuição de cargas arbitrária que produz um campo elétrico $\mathbf{E}$ conhecido.
- Qual é o trabalho realizado pela **força elétrica** ao deslocarmos uma carga de teste puntiforme entre dois pontos a e b ao longo de um caminho arbitrário C?



$$W_e = \int_a^b \underbrace{\mathbf{F}_e}_{=q\vec{E}} \cdot d\boldsymbol{l} = q\int_a^b \mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{l} = q(V_a - V_b)$$

Portanto:

$$\boxed{V_a - V_b = \frac{W_e}{q}}$$

Interpretação física para a ddp: Trabalho por unidade de carga realizado pela força elétrica no deslocamento de uma carga de teste entre os dois pontos!

Outra pergunta: Qual é o trabalho realizado por uma **força externa** ao deslocarmos a carga de teste, supondo que ela parte do repouso em a e volta ao repouso em b?

Pelo **teorema trabalho-energia**:

$$W_{tot} = W_{ext} + W_e = \Delta K = 0$$

$$\boxed{W_{ext} = -W_e = q(V_b - V_a)}$$

onde $\Delta K = 0$ é a variação de energia cinética da carga teste.

OBS: O livro-texto trabalha principalmente com a quantidade W_{ext} (dentro da hipótese acima) e a chama apenas de W. Aqui, prefiro trabalhar com W_e e deixar mais claro de qual trabalho estou falando.

2.4.2 – Energia potencial eletrostática

- W_e não depende do caminho entre os pontos a e b. Portanto, **a força eletrostática é conservativa**, como já havíamos antecipado.
- Para forças desse tipo, podemos escrever W_e em termos da variação de uma **energia potencial** U:

$$W_e = -\Delta U = U_a - U_b = q\,(V_a - V_b) = \underbrace{q V_a}_{=U_a} - \underbrace{q V_b}_{=U_b}$$

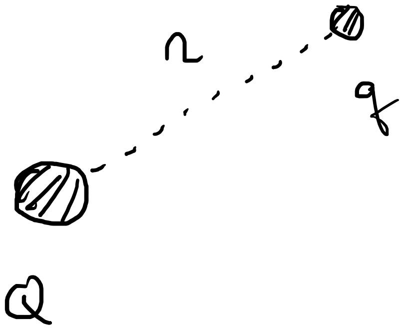
Comparando com a expressão em termos da ddp, vemos que:

$$\boxed{U = q\,V} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{V = \frac{U}{q}}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q}$$

- Esta relação define o **potencial elétrico como a energia potencial eletrostática por unidade de carga** (para a interação entre uma distribuição e uma carga de teste). Note a similaridade com a definição de campo elétrico!
- Assim como o potencial, a energia potencial é bem definida a menos de uma constante arbitrária (escolha de zero)!

Exemplo: interação entre duas partículas carregadas



("Distrib.")

O potencial produzido por Q num ponto a uma distância r é dado por:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$$

Considerando q uma carga de teste, a energia potencial do sistema é:

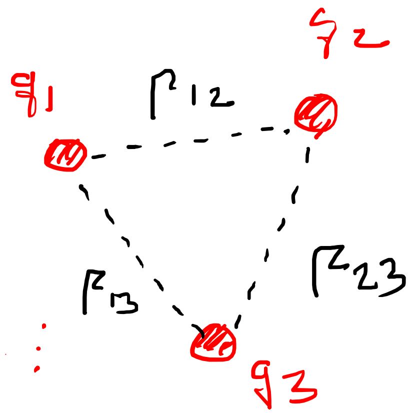
$$\boxed{U(r) = q\,V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r}}$$

Note que:

- Esta energia é associada à interação entre as duas partículas. Não é a energia de apenas de uma partícula!
- O zero da energia foi fixado pelo zero do potencial: ambos vão a zero quando $r \to \infty$.

2.4.3 – Energia potencial de uma distribuição discreta

Considere agora uma coleção de cargas puntiformes. Qual é a energia potencial desta distribuição?



Como a relação entre W_e e U é linear, a energia potencial também deve satisfazer o **princípio da superposição**:

$$U = U_{12} + U_{13} + U_{23} + \cdots =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \ldots$$

$$\boxed{= \frac{1}{2}\sum_{i}\sum_{j\neq i}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}}$$

Note que:

- O fator $1/2$ no último termo evita a dupla contagem do par i, j no somatório duplo.
- A **autointeração** $(i = j)$ é excluída da soma.

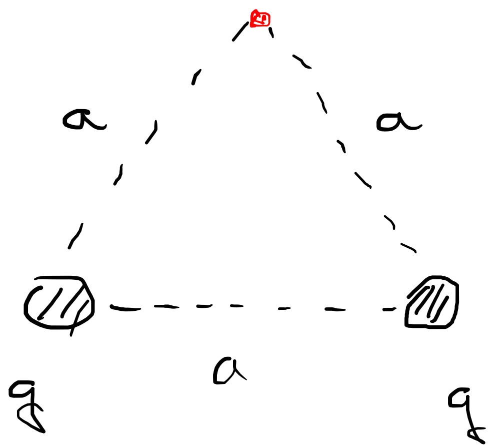
O resultado anterior ainda pode ser reescrito em uma forma conveniente. Note que:

$$U = \frac{1}{2}\sum_i \sum_{j \neq i} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_i q_i \underbrace{\sum_{j \neq i} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_j}{r_{ij}}}_{= V(\vec{r}_i)}$$

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\sum_i q_i V(\mathbf{r}_i)}$$

onde $V(\mathbf{r}_i)$ é o potencial produzido por **todas as outras cargas** no ponto onde está q_i.

Exemplo: Três partículas carregadas

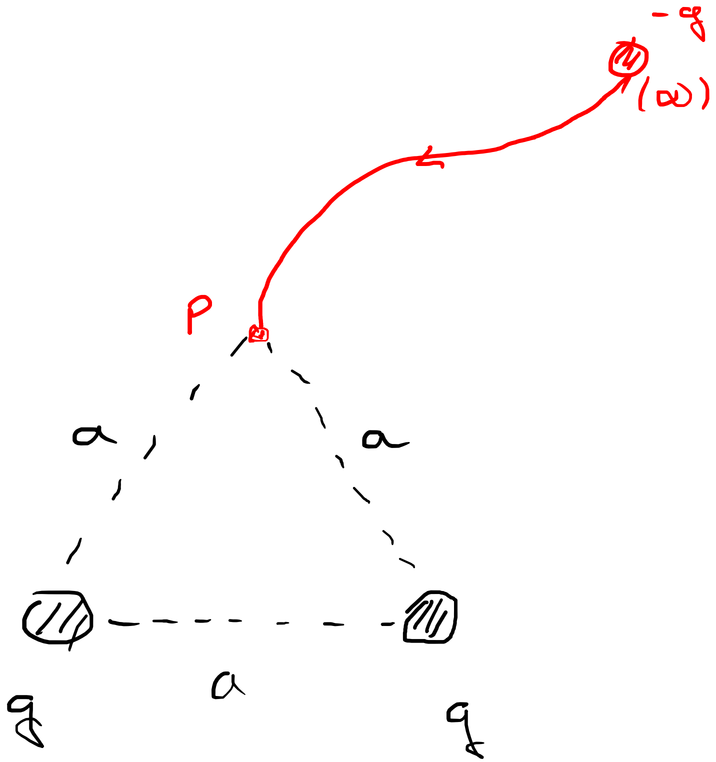


Duas partículas de carga q são posicionadas sobre os vértices de um triângulo equilátero de lado a, como mostra a figura ao lado.

(a) Qual é o trabalho que uma **força externa** deve realizar para trazer uma terceira partícula de carga $-q$ do infinito ao vértice desocupado?

(b) Qual é a energia potencial eletrostática da configuração de três partículas?

OBS: Assuma que a terceira partícula se encontra inicialmente em repouso e termina em repouso no vértice desocupado.



(a) Com as hipóteses do problema, sabemos que:

$$W_{ext} = -W_e = \Delta U$$

$$= (-q)\Delta V$$

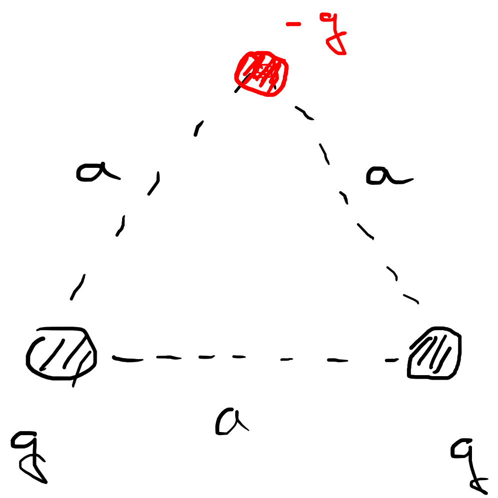
$$= (-q)[V(P) - V(\infty)]$$

Calculando o potencial produzido pelas duas partículas:

- No infinito: $V(\infty) = 0$
- No vértice desocupado:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a}$$

Portanto: $\boxed{W_{ext} = (-q)\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a} = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a}}$ → Qual é o significado físico de $W_{ext} < 0$?



(b) Somando as energias associadas à interação de cada par na configuração final, obtemos:

$$U_{conf} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q.q}{a} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q.(-q)}{a} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q.(-q)}{a}$$

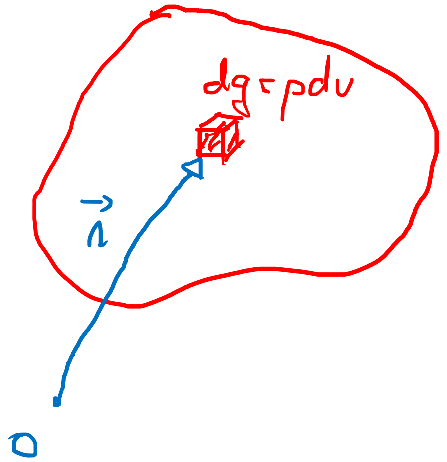
$$\boxed{= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a}}$$

Qual é o significado físico de $U_{conf} < 0$?

Exercício: Refaça o problema, mas suponha agora que duas partículas de cargas opostas ocupam os vértices do triângulo inicialmente.

2.4.3 – Energia potencial de uma distribuição contínua

Considere agora uma distribuição contínua de cargas com densidade de carga conhecida. Qual é a energia potencial desta distribuição?



Generalizando o resultado anterior, podemos escrever:

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\int_{dist} dq\, V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r})V(\mathbf{r})dv}$$

↳ $U = \frac{1}{2}\sum_i q_i V(\vec{r}_i)$ (distrib. discreta)

Note que:

- Em 1D e 2D, basta substituir dq pela densidade de carga e infinitésimo espacial apropriados.
- Aqui, $V(\mathbf{r})$ é o potencial produzido por toda a distribuição no ponto $\mathbf{r}$, **incluindo a própria carga infinitesimal neste ponto**. Há portanto uma diferença fundamental entre esta fórmula e as fórmulas utilizadas para distribuições discretas!

Armazenamento de energia no campo elétrico

A expressão anterior pode ser reescrita de outra forma e revela um resultado fundamental. Da lei de Gauss, temos que:

$$\rho = \varepsilon_0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} \qquad \Longrightarrow \qquad U = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{V}} \rho\, V dv = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\mathcal{V}} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}) V dv$$

Vamos fazer agora uma integração por partes. Para isso, observe a seguinte regra de produto (ver cap. 1):

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (V\mathbf{E}) = V\,(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}) + \underbrace{(\boldsymbol{\nabla} V)}_{= -\vec{E}} \cdot \mathbf{E}$$

Substituindo $V\,(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E})$ na integral e lembrando que $\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla} V$, obtemos:

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\int_{\mathcal{V}} E^2 dv + \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\nabla} \cdot (V\mathbf{E}) dv\right)$$

Aplicando o teorema de Gauss à segunda integral, obtemos:

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\int_{\mathcal{V}} E^2 dv + \oint_{\mathcal{S}} \underbrace{V\mathbf{E}}_{\sim 1/r^3} \cdot \underbrace{d\mathbf{A}}_{\sim r^2}\right)$$

$\sim 1/r$

onde $\mathcal{S}$ é a superfície que delimita o volume $\mathcal{V}$.

Note agora que:

- Podemos estender a região de integração à todo o espaço, uma vez que $\rho = 0$ fora da distribuição.
- Nesse limite, a superfície $\mathcal{S}$ estará no infinito.
- Para $r \to \infty$ teremos, no máximo, $E \sim 1/r^2$ e $V \sim 1/r$. Como $dA \sim r^2$, vemos que a integral de superfície deve se comportar como, no máximo, $1/r$ nesse limite e deve ir a zero.

Portanto:

$$\boxed{U = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\substack{todo\ o \\ espaço}} E^2 dv}$$

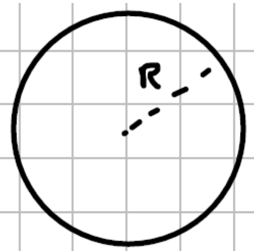
Note que as duas expressões que obtivemos dão interpretações alternativas e equivalentes para a energia:

- Armazenada sob a forma de carga (integral envolvendo ρ)
- Armazenada no campo elétrico produzido pela distribuição (integral acima)

Podemos ainda definir a **densidade de energia** a partir da expressão acima:

$$\boxed{u_E = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2}$$

Exemplo: Esfera isolante com distribuição de cargas não-uniforme (simetria esférica)



$\rho(r) = \rho_0 \frac{r}{R}$; r = dist. até o centro

OBS: ρ_0 é uma constante positiva e R é o raio da esfera.

Já vimos que o campo eletrostático produzido por essa distribuição é:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}\,, & r > R \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{R^4}r^2\hat{\mathbf{r}}, & r \leq R \end{cases} \qquad \text{com} \quad Q = \rho_0 \pi R^3$$

Solução 1: Vamos utilizar a integral que envolve o campo elétrico. Lembre que a integral deve ser feita sobre todo o espaço:

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\substack{todo\ o \\ espaço}} E^2 dv$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^4}r^2\right)^2 r^2 \text{sen}\theta\ dr\ d\theta\ d\varphi + \int_R^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\right)^2 r^2 \text{sen}\theta\ dr\ d\theta\ d\varphi\right)$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\int_0^R dr\,\frac{r^6}{R^8} + \int_R^\infty dr\,\frac{1}{r^2}\right)$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(\frac{1}{7}+1\right) \qquad \boxed{= \frac{Q^2}{7\pi\varepsilon_0 R}}$$

Solução 2: Já sabemos também que o potencial produzido pela distribuição (com zero no infinito) é:

$$V(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r}\,, & r > R \\[2ex] \dfrac{1}{12\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{R^4}(4R^3 - r^3), & r \leq R \end{cases}$$

Podemos utilizar então a integral que envolve a densidade. Neste caso, a integral é feita apenas sobre o volume da distribuição:

$$U = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{V}} \rho\, V dv = \frac{1}{2}\int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \overbrace{\frac{Qr}{\pi R^4}}^{=\rho(r)} \frac{1}{12\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^4}(4R^3 - r^3)\, r^2 \mathrm{sen}\theta\; dr\; d\theta\; d\varphi$$

$$= \frac{Q^2}{6\pi\varepsilon_0 R^8}\int_0^R (4R^3 - r^3) r^3 dr$$

$$U = \frac{Q^2}{6\pi\varepsilon_0 R^8}\int_0^R dr\,(4R^3 - r^3)r^3$$

$$= \frac{Q^2}{6\pi\varepsilon_0 R^8}\left(R^7 - \frac{R^7}{7}\right)$$

$$= \frac{Q^2}{6\pi\varepsilon_0 R^8}\frac{6R^7}{7} \qquad \boxed{= \frac{Q^2}{7\pi\varepsilon_0 R}}$$

Exercícios: Calcule a energia armazenada em:

(a) Uma casca esférica oca de raio R, uniformemente carregada com carga total Q (exemplo 2.8 do livro-texto).

(b) Uma esfera maciça de raio R, uniformemente carregada com carga total Q (problemas 2.32 e 2.33 do livro-texto).

2.4.4 – Comentários adicionais

(I) Energia para formar uma carga puntiforme

- As expressões para a energia de uma distribuição contínua de cargas incluem a interação de um elemento infinitesimal de carga consigo mesmo.
- Formalmente, esta quantidade representa a energia para formar a própria carga. Por que não incluímos esta contribuição nas expressões da energia de uma distribuição discreta de cargas?

Basta olhar para a energia armazenada no campo produzido por uma partícula carregada (carga q):

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\substack{todo\ o\\ espaço}} E^2 dv = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\right)^2 r^2 \mathrm{sen}\theta dr\, d\theta\, d\varphi = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\frac{1}{r^2}dr = \infty!$$

Portanto, a contribuição associada à criação de uma carga puntiforme é infinita!

- Por isso **não** consideramos essa contribuição ao lidar com distribuições discretas e assumimos que as partículas já foram criadas e estão disponíveis desde o princípio.

- Outra opção é assumir um tamanho finito (e pequeno) para as partículas e supor que há uma distribuição de cargas em seu interior (ou superfície), tratando-as efetivamente como distribuições contínuas e localizadas. Neste caso, a energia será finita.

OBS: Mesmo para distribuições contínuas podemos encontrar divergências no cálculo da energia. Os exemplos mais óbvios são distribuições infinitas (e portanto idealizadas) de cargas como o plano infinito e o fio infinito uniformemente carregados. Verifique!

(II) Energia x princípio da superposição

- A expressão de U que envolve a integração do campo **não** obedece ao princípio da superposição, uma vez que a relação entre U e $\mathbf{E}$ **não** é linear.
- Em particular, considere duas distribuições de cargas que, quando isoladas, produzem campos $\mathbf{E}_1$ e $\mathbf{E}_2$. Como o campo elétrico resultante é $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$, a energia total armazenada pelo sistema é:

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\substack{todo\ o \\ espaço}} E^2 dv = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\substack{todo\ o \\ espaço}} (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^2 dv$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\substack{todo\ o \\ espaço}} E_1^2 dv + \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\substack{todo\ o \\ espaço}} E_2^2 dv + \varepsilon_0 \int_{\substack{todo\ o \\ espaço}} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 dv$$

Os dois primeiros termos correspondem às energias associadas à cada distribuição isoladamente, mas há um terceiro termo que inclui os efeitos da interação entre elas!

Pergunta: Há alguma contradição entre esta observação e a discussão feita no início da seção 2.4.3 (slide 6)?

Leitura adicional

- Exercícios resolvidos de cálculo de energia em distribuições discretas: ver notas de aula e gravações do curso de Física 3

Referências básicas

- Griffiths (3ª edição) – cap.2
- Purcell – caps. 1 e 2