

Eletromagnetismo I

Cap. 5: Magnetostática

5.2: Correntes estacionárias e a lei de Biot-Savart

Prof. Marcos Menezes

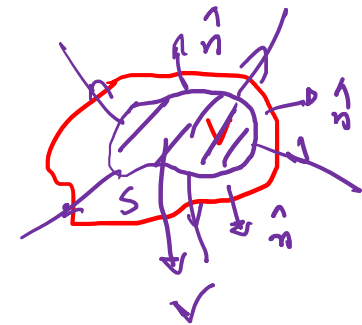
Instituto de Física - UFRJ

5.2 – Correntes estacionárias e a lei de Biot-Savart

5.2.1 – A equação da continuidade e correntes estacionárias

Se representarmos uma distribuição de correntes por sua densidade volumétrica de correntes $\mathbf{J}(\mathbf{r})$, a corrente total que flui através de uma superfície **fechada** S é dada por:

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}$$



Por outro lado, pela lei de conservação da carga elétrica, se uma corrente flui **para fora** de S , a carga no interior de S deve **diminuir**:

$$I = -\frac{dQ_{int}^S}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \, dv = -\int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dv$$

onde $\mathcal{V}$ é o volume da região delimitada por S .

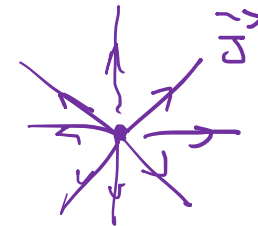
Igualando as duas equações e utilizando o teorema de Gauss na 1ª integral, obtemos:

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = - \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dv$$

$$\int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \mathbf{J}) dv = - \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dv$$

Como o resultado deve valer para qualquer volume $\mathcal{V}$, os integrandos devem ser iguais:

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}}$$



Esta é a **equação da continuidade**. Ela expressa em forma local a lei de conservação de carga elétrica!

Correntes estacionárias

Possuem as seguintes propriedades:

- **J não varia com o tempo**
- **Não produzem acúmulo ou falta de cargas em nenhum instante**

Matematicamente:

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

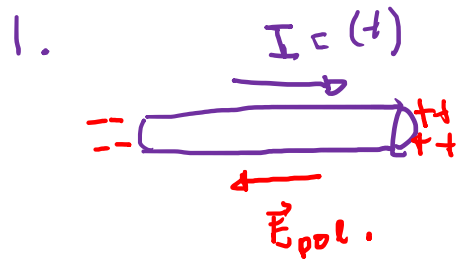
A equação da continuidade ainda implica que:

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{J} = 0}$$

Correntes com essas propriedades produzem campos magnéticos independentes do tempo. O estudo dos fenômenos produzidos por elas constitui a **magnetostática**.

Observações

1. Correntes estacionárias **não** podem fluir em circuitos abertos. **Por que?**
2. Em circuitos fechados, precisamos de um agente não-eletrostático (**força eletromotriz**) para manter a corrente circulando. **Por que?**
3. Uma carga puntiforme em MRU **não** constitui uma corrente estacionária. **Por que?**

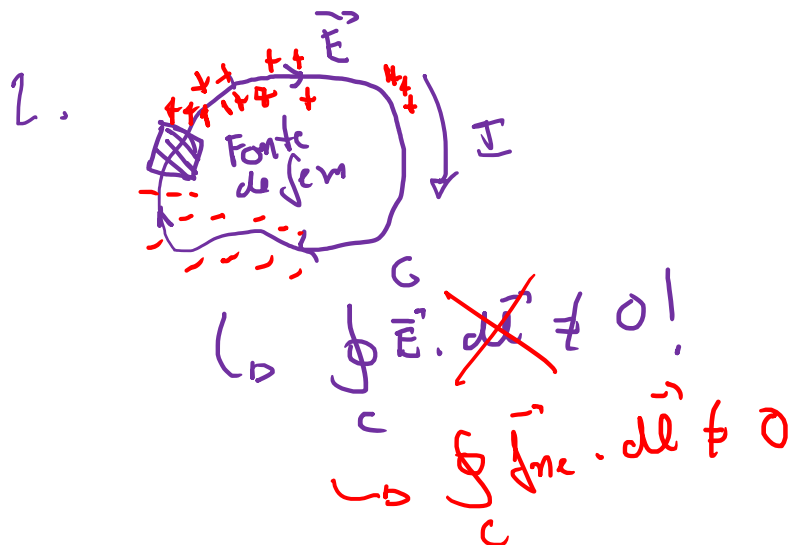


3.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

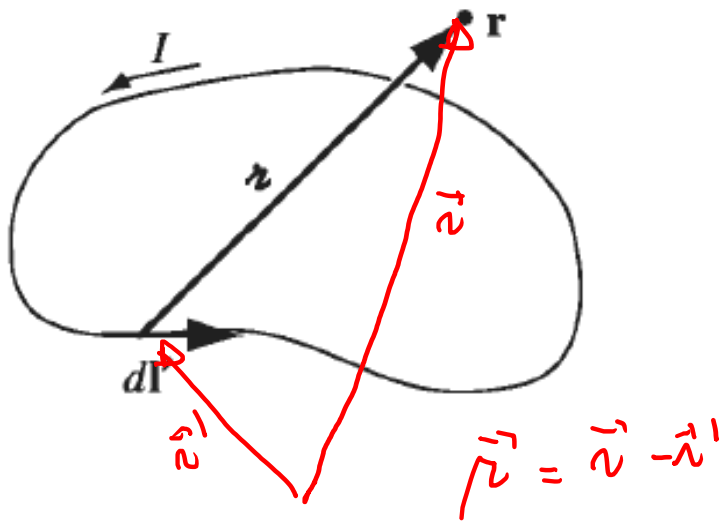
$$\vec{J} = \rho \vec{v} = q \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_q(t)) \cdot \vec{v}$$

$$\vec{r}_q(t) = \vec{r}_q(0) + \vec{v} t$$



5.2.2 – A lei de Biot-Savart

Linhas de corrente (1D)



Permeabilidade magnética do vácuo:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{T.m}}{\text{A}}$$

Contribuição de $d\mathbf{l}'$ para o campo magnético no ponto $\mathbf{r}$:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell}' \times \hat{r}}{r^2}$$

Campo resultante no ponto $\mathbf{r}$:

$$\vec{B} = \int_{S_0} d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{S_0} \frac{d\vec{\ell}' \times \hat{r}}{r^2}$$

Distribuições de correntes em 2D:

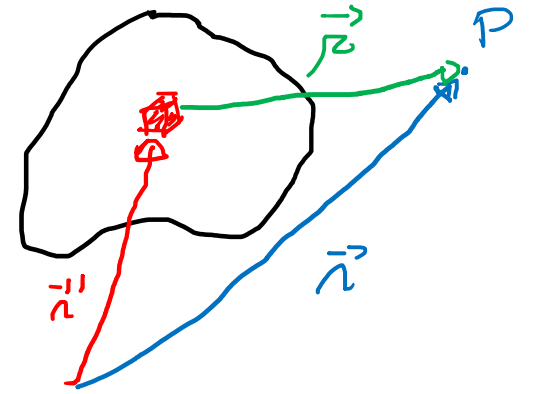
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{distrib.}} \frac{\vec{k}(\vec{r}') \times \hat{r}}{r^2} dA'$$

Distribuições de correntes em 3D:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{distrib.}} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \hat{r}}{r^2} dv'$$

Note que esta lei:

- **É válida apenas para correntes estacionárias!**
- Desempenha um papel análogo ao da lei de Coulomb na eletrostática.

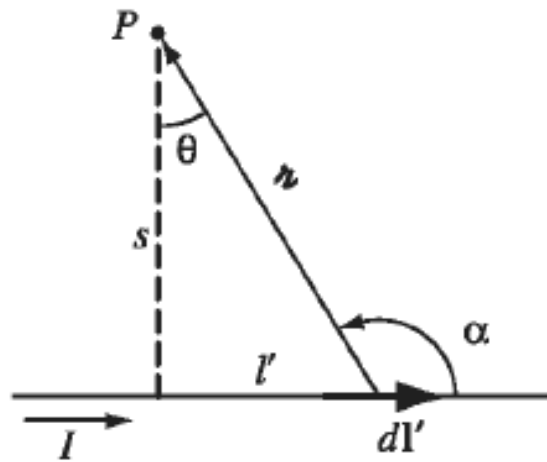


$$\begin{aligned} I d\vec{r}' \\ \downarrow \\ \vec{r} da' \\ \downarrow \\ \vec{J} dv' \end{aligned}$$

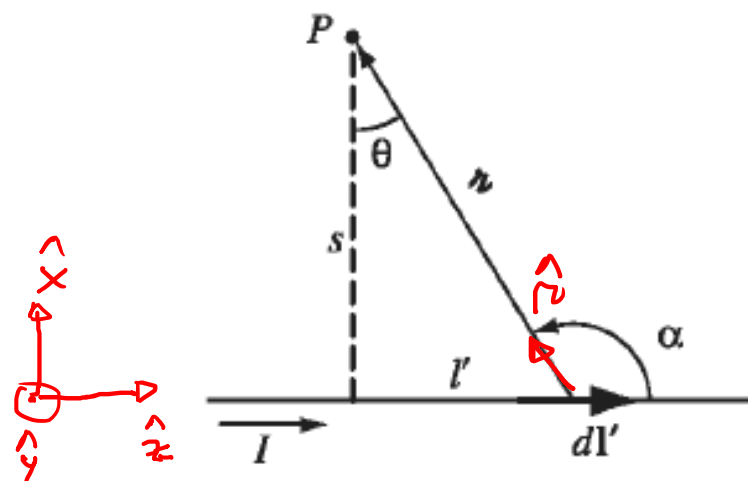
Exemplo 1 (fio retilíneo):

Exemplo 5.5

Encontre o campo magnético a uma distância s de um fio longo e reto pelo qual passa uma corrente estacionária I (Figura 5.18).



Os parâmetros geométricos relevantes estão definidos na figura.



Primeiro, note que:

$$d\mathbf{l}' \times \hat{\mathbf{r}} = dl' \sin \alpha \hat{\mathbf{y}}$$

e:

$$\sin \alpha = \cos \theta = \frac{s}{r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{s}{\cos \theta}$$

É interessante utilizarmos θ como variável de integração. Para isso, note ainda que:

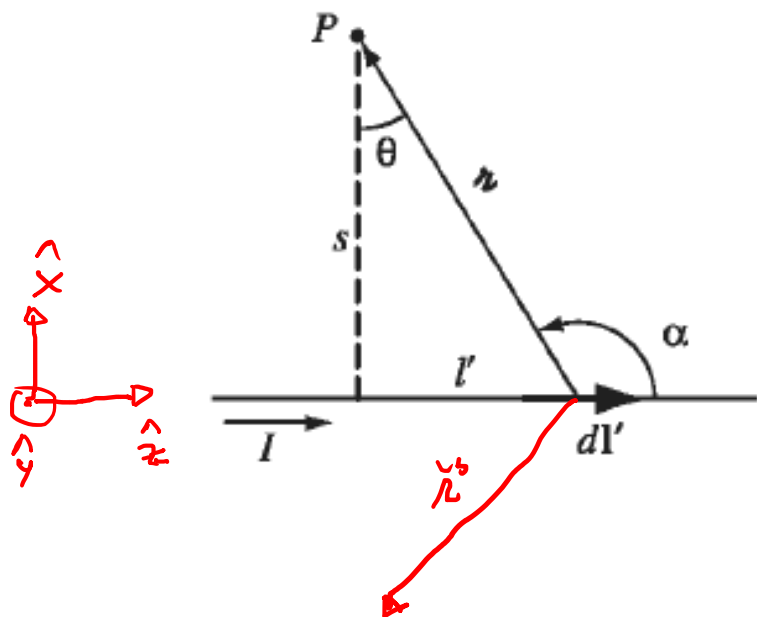
$$\tan \theta = \frac{l'}{s} \quad \Rightarrow \quad dl' = s \sec^2 \theta d\theta$$

Reunindo essas informações, escrevemos a contribuição de $d\mathbf{l}'$ para o campo em P como:

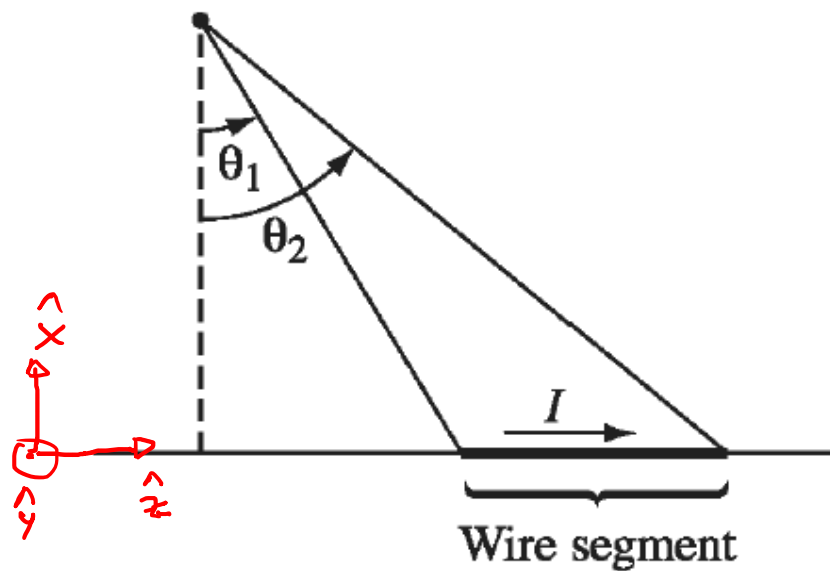
$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l}' \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl' \sin \alpha \hat{\mathbf{y}}}{\left(\frac{s}{\cos \theta}\right)^2}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{s \sec^2 \theta d\theta \cos \theta}{\left(\frac{s}{\cos \theta}\right)^2} \hat{\mathbf{y}}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi s} \cos \theta d\theta \hat{\mathbf{y}}$$



Para um **segmento do fio**, podemos integrar entre os valores extremos θ_1 e θ_2 para obter o campo resultante:



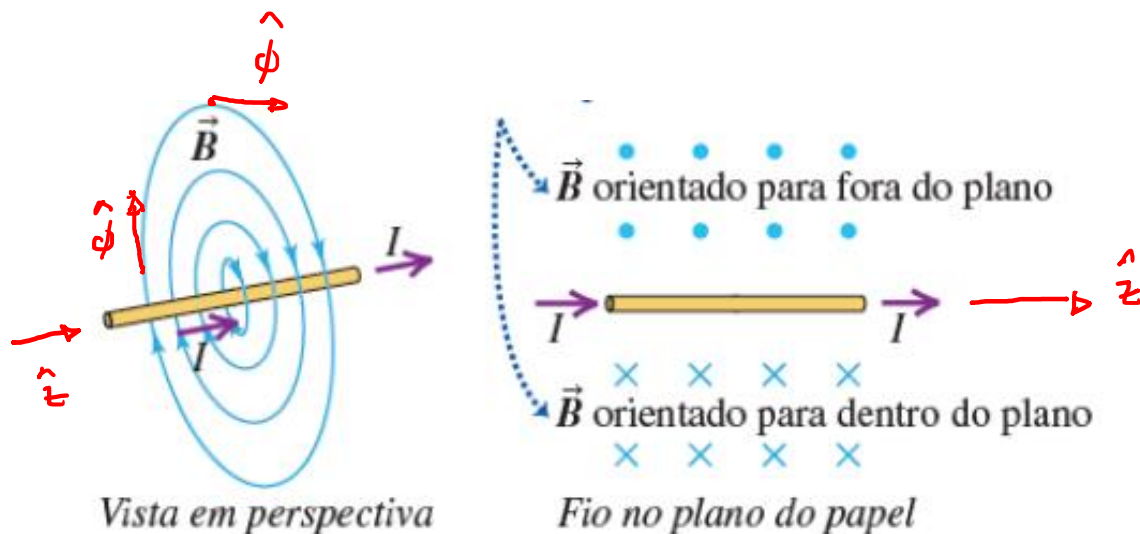
$$\mathbf{B} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\mu_0 I}{4\pi s} \cos \theta \, d\theta \, \hat{\mathbf{y}}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi s} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \hat{\mathbf{y}}$$

Para um **fio longo** (tratado como infinito), tomamos os limites $\theta_1 \rightarrow -\pi/2$ e $\theta_2 \rightarrow +\pi/2$, logo:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\mathbf{y}}$$

Nós calculamos o campo para um ponto particular acima do fio. De forma geral, podemos ver que o problema tem **simetria de rotação** em torno do eixo do fio:



Com isso, o campo em um ponto arbitrário é:

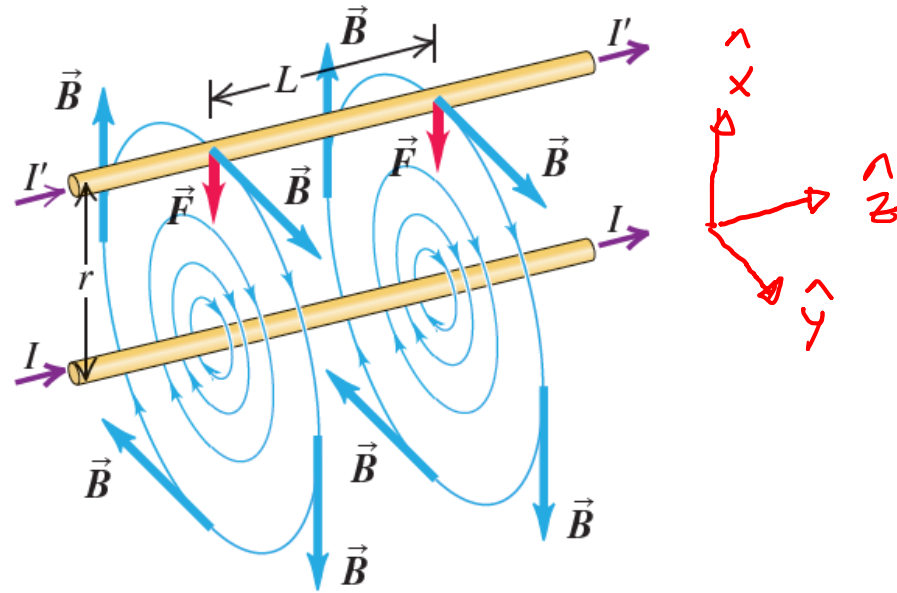
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi}$$

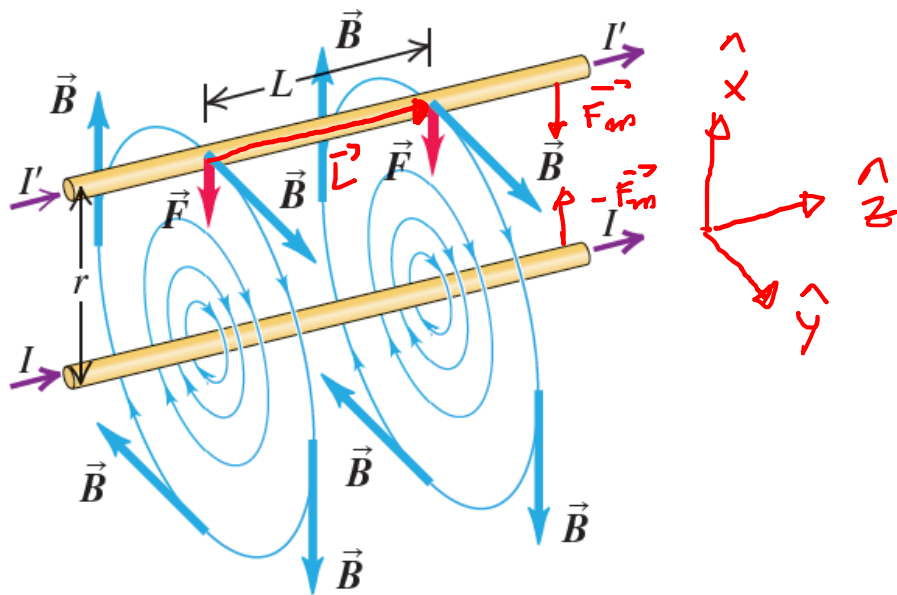
onde $\hat{\phi}$ é o unitário da direção azimutal (circunferencial) no sistema de coordenadas cilíndricas.

Note que o sentido de I e o sentido de $\mathbf{B}$ estão ligados via regra da mão-direita (polegar direito no sentido de $I \rightarrow$ palma da mão direita dá o sentido de $\mathbf{B}$)!

Força entre fios paralelos

Considere agora dois fios longos, retilíneos e paralelos, transportando correntes estacionárias de intensidades I e I' no mesmo sentido. Qual é a força magnética que um fio exerce sobre uma porção de comprimento L do outro?





O campo produzido pelo fio de baixo **em pontos sobre o fio de cima** é:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\mathbf{y}}$$

Note que este campo é uniforme sobre o fio de cima!

A força magnética sobre um segmento de comprimento L do fio de cima é:

$$\mathbf{F}_m = \int_{seg} I' (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) = I' \left(\int_{seg} d\mathbf{l} \right) \times \mathbf{B} = I' (L \hat{\mathbf{z}}) \times \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\mathbf{y}} \right) = -\frac{\mu_0 I I'}{2\pi r} L \hat{\mathbf{x}}$$

Note que a força tem caráter **atrativo**!

A força total entre os fios é infinita ($L \rightarrow \infty$), de modo que é conveniente definirmos a **força por unidade de comprimento**:

$$f_m \equiv \frac{|\mathbf{F}_m|}{L} = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi r}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I = I' = 1 \text{ A} \\ r = 1 \text{ m} \end{array} \right. \Rightarrow f_m = 2 \times 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Esta relação era utilizada até pouco tempo para definir o padrão do Ampère. Atualmente, utilizamos os padrões de carga (carga elementar e) e tempo (frequência de uma transição num átomo de Cs) para definir esta unidade.

Exercícios adicionais para este problema:

- O que mudaria se as correntes fossem anti-paralelas?
- O que você pode dizer a respeito da **força elétrica** entre os fios?
- Se não houvesse compensação entre cargas positivas e negativas dentro dos fios, como a força magnética se compararia com a força elétrica? **Dica:** veja o problema 5.12 do livro-texto.

$$\begin{array}{cc} \lambda = cte & \lambda' \\ \downarrow \vec{v} \uparrow & \downarrow \uparrow \vec{v}' \\ I = \lambda v & I' = \lambda' v' \end{array}$$

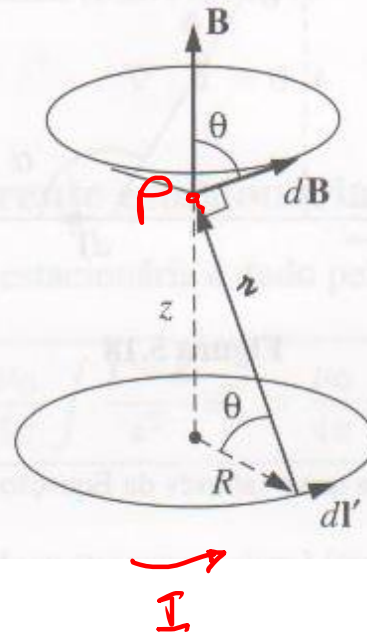
$\sim h$

$$\frac{F_m}{F_e} = \mu_0 \epsilon_0 v^2 = \frac{v^2}{c^2} \quad \rightarrow \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

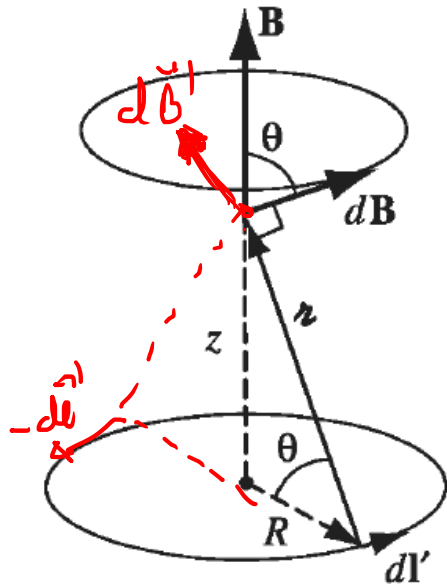
Exemplo 2 (espira circular):

Exemplo 5.6

Encontre o campo magnético a uma distância z acima do centro de um circuito circular de raio R , pelo qual passa uma corrente estacionária I (Figura 5.21).



Os parâmetros geométricos relevantes são definidos na figura abaixo.



Primeiro, note que:

$$dB = |d\mathbf{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{|d\mathbf{l}' \times \hat{\mathbf{r}}|}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl'}{(R^2 + z^2)}$$

$= |d\vec{l}'| |\hat{r}| \cdot \sin 90^\circ$

- Ao varremos o circuito, o vetor $d\mathbf{B}$ descreverá um cone em torno do eixo Z .
- Com isso, componentes perpendiculares a este eixo serão integradas a zero, de forma que nos interessa apenas a componente z de $d\mathbf{B}$.

$\hookrightarrow \vec{B} = B_z \hat{z}$

Assim:

$$dB_z = dB \cos \theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl'}{(R^2 + z^2)} \frac{R}{(R^2 + z^2)^{1/2}}$$

Integrando sobre o circuito, note que R e z são constantes. Com isso:

$$B_z = \int_{\text{circ}} dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \underbrace{\int_{\text{circ}} dl'}_{= 2\pi R} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Portanto:

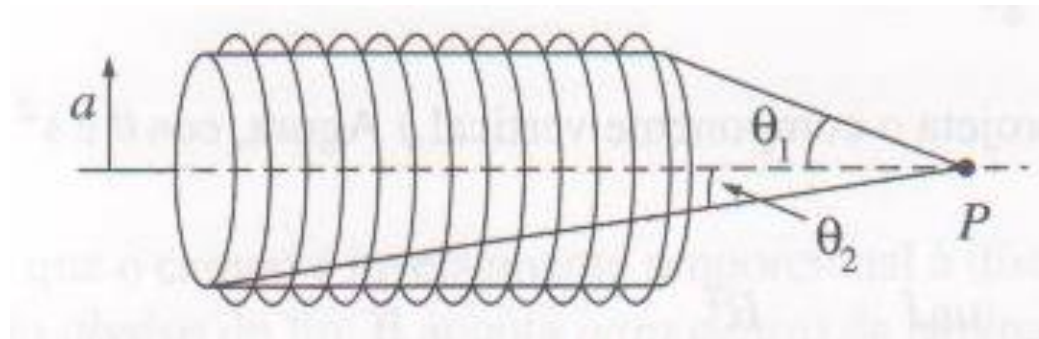
$$\boxed{\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}}}$$

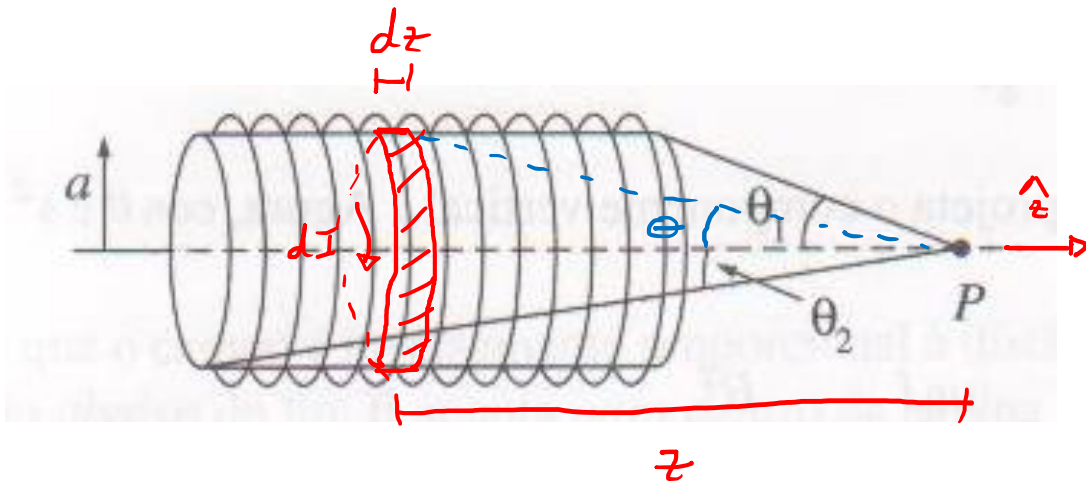
Exercício: Obtenha uma expressão aproximada para um ponto muito distante sobre o eixo, de forma que $z \gg R$. Comparando com a eletrostática, como você interpretaria a dependência com z ?

$$\vec{B} \approx \frac{\mu_0 I R^2}{2 z^3} \hat{z} = \frac{\mu_0 (I \pi R^2 \hat{z})}{2 \pi z^3} \rightarrow \vec{m} = I \pi R^2 \hat{z} \text{ ~ dipolo magnético pontiforme}$$

Exemplo 3 (solenóide):

Problema 5.11 Encontre o campo magnético no ponto P no eixo de um solenóide enrolado de forma compacta (bobina helicoidal) com n voltas por unidade de comprimento, envolvendo um tubo cilíndrico de raio a e pelo qual passa a corrente I (Figura 5.25). Expresse sua resposta em termos de θ_1 e θ_2 (é o jeito mais fácil). Considere que as voltas são essencialmente circulares e use o resultado do Exemplo 5.6. Qual é o campo no eixo de um solenóide *infinito* (infinito nos dois sentidos)?





Considere uma porção infinitesimal do solenoide de comprimento dz ao longo do eixo. A corrente que passa nesta porção é:

$$dI = dN I = (n dz) I$$

Utilizando o resultado do exemplo anterior, vemos que a contribuição desta porção para o campo em P é

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 dI}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}} = \frac{\mu_0 n I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} dz \hat{\mathbf{z}}$$

Pela figura (substituição trigonométrica):

$$\text{tg } \theta = \frac{a}{z} \quad \Rightarrow \quad dz = -a \text{cosec}^2 \theta d\theta$$

Assim:

$$\begin{aligned} d\mathbf{B} &= \frac{\mu_0 n I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} dz \hat{\mathbf{z}} = -\frac{\mu_0 n I}{2} \frac{a^2}{a^3 \cos^3 \theta} a \cos^2 \theta d\theta \hat{\mathbf{z}} \\ &= -\frac{\mu_0 n I}{2} \sin \theta d\theta \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

Integrando, obtemos o campo resultante no ponto P :

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 n I}{2} \hat{\mathbf{z}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \hat{\mathbf{z}}$$

Exercício: Qual é o campo produzido por um solenoide infinito em seu eixo? O que ele tem de especial?

Exercício 2: Tente resolver este problema pensando no solenoide como uma distribuição superficial de correntes com $\mathbf{K} = nI\hat{\boldsymbol{\phi}}$.

Referências básicas

- Griffiths (3ª edição) – cap. 5
- Purcell – caps. 4 (4.1 e 4.2) e 6

Leitura avançada

- Zangwill – seções 9.1, 10.1 e 10.2