

Eletromagnetismo I

Cap. 6: Campos magnéticos em meios materiais

6.1: Magnetização

6.2: Campo de um objeto magnetizado

Prof. Marcos Menezes

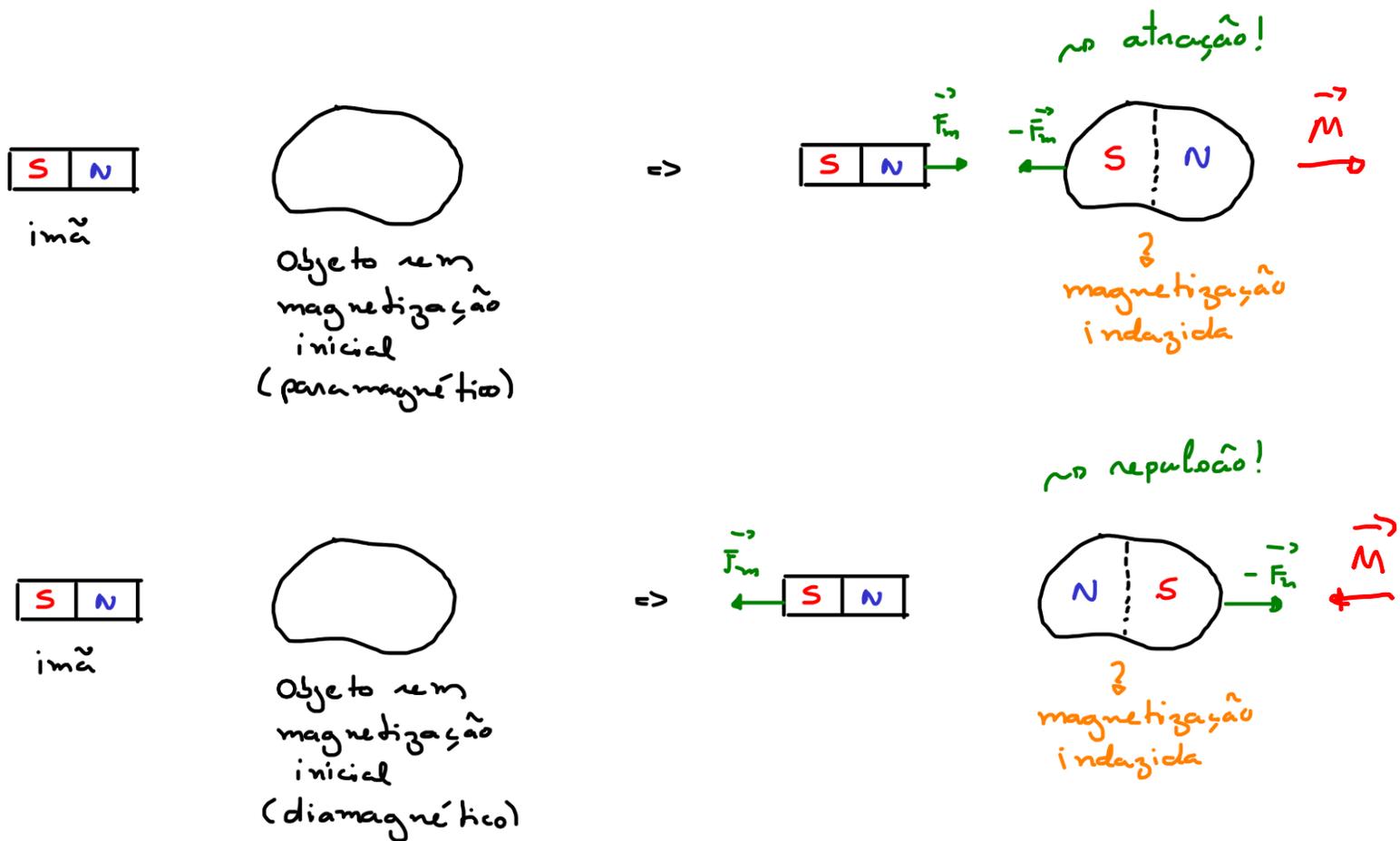
Instituto de Física - UFRJ

6.1 – Magnetização

6.1.1 – Diamagnetos, paramagnetos e ferromagnetos



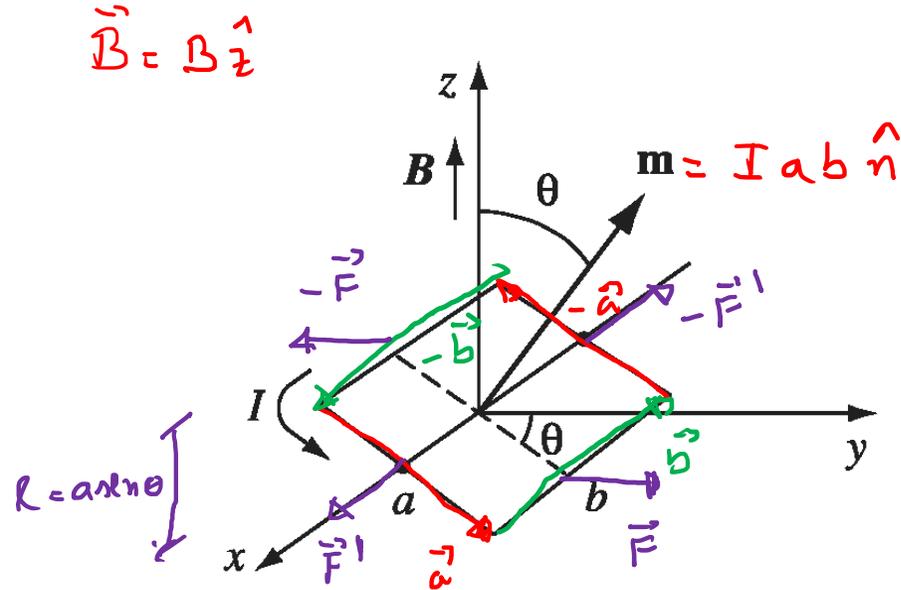
- **Ferromagnetos** (imãs permanentes) são magnetizados na presença de um campo magnético externo e retêm a magnetização quando o campo é retirado
- **Diamagnetos e Paramagnetos** também se magnetizam na presença de um campo externo, mas não preservam a magnetização quando o campo é retirado
- **Paramagnetos são atraídos** por imãs permanentes, enquanto **diamagnetos são repelidos**



6.1.2 – Forças e torques em dipolos magnéticos

De forma geral, o paramagnetismo resulta do alinhamento de dipolos magnéticos (spin do elétron e “espiras de corrente” orbital) a um campo externo. Vamos desenvolver um modelo simples para este fenômeno.

(i) Espira de corrente retangular imersa em campo externo uniforme



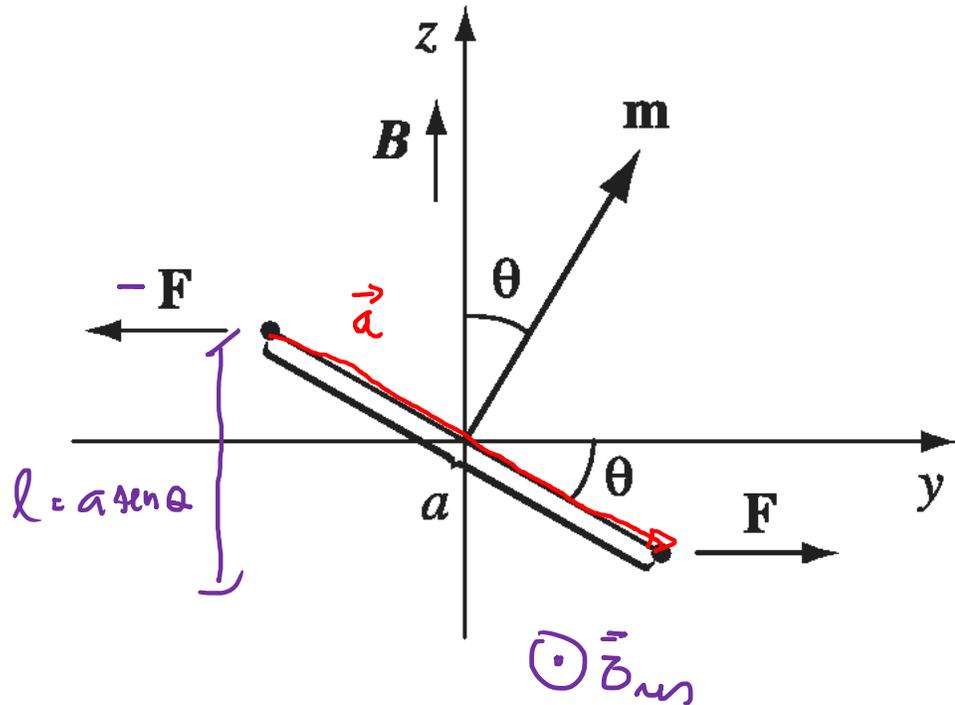
A força magnética resultante sobre a espira é:

$$\mathbf{F}_{res} = I \oint_{\text{espira}} d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = I \left(\oint_{\text{espira}} d\mathbf{l} \right) \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

pois $\oint_{\text{espira}} d\mathbf{l} = \mathbf{0}$ para qualquer loop fechado (ver cap. 5.1).

Com isso, pela 1ª lei de Newton, o CM da espira deve permanecer em repouso ou em MRU.

Por outro lado, a espira ainda pode sentir a ação de um **torque resultante**.



- As forças sobre os segmentos de lado a tem módulos iguais, sentidos opostos e atuam ao longo de uma mesma linha, portanto não exercem um torque resultante.
- As forças \mathbf{F} e $-\mathbf{F}$ sobre os segmentos de lado b não atuam ao longo da mesma linha e formam um binário de forças!

Note que:

$$\mathbf{F} = I \mathbf{b} \times \mathbf{B} = IbB \hat{\mathbf{y}}$$

e com isso:

$$\boldsymbol{\tau}_{res} = \mathbf{a} \times \mathbf{F} = aF \sin \theta \hat{\mathbf{x}} = a (IbB) \sin \theta \hat{\mathbf{x}}$$

Note ainda que $\boldsymbol{\tau}_m$ independe do ponto de referência pois a força resultante sobre a espira é nula.

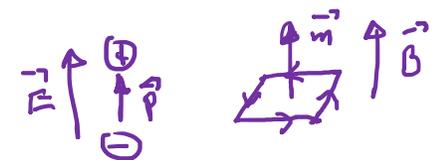
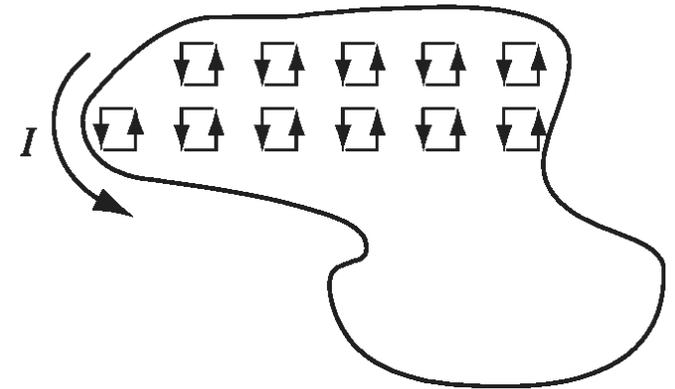
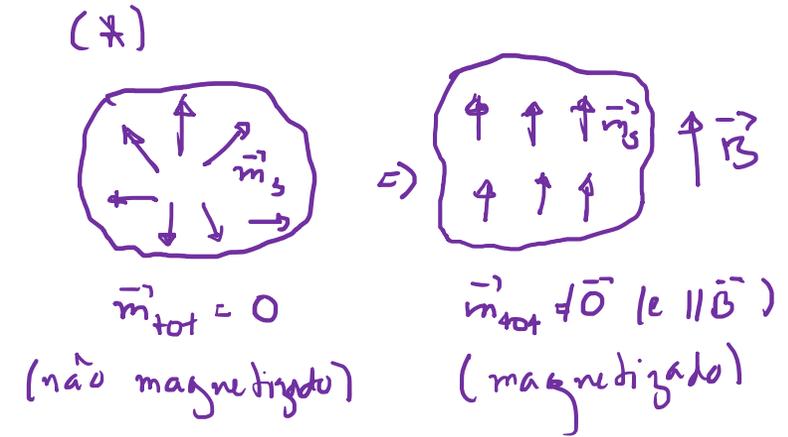
Podemos reescrever o resultado anterior como:

$$\tau_{res} = Iab B \sin \theta \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

onde $\mathbf{m} = Iab\hat{\mathbf{n}}$ é o momento de dipolo magnético da espira.

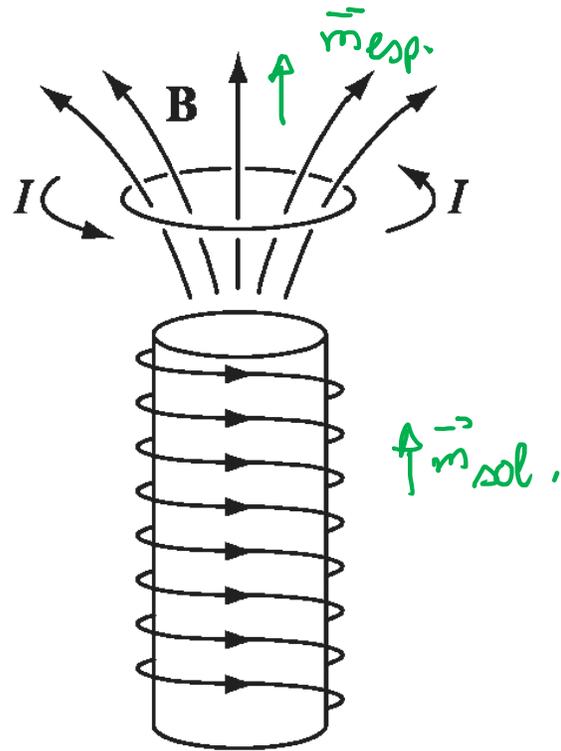
Note que:

- Este resultado permanece válido para espiras de forma arbitrária em \mathbf{B} uniforme (com o \mathbf{m} apropriado).
- O torque atua no sentido de alinhar \mathbf{m} e \mathbf{B} (configuração de equilíbrio estável)!
- Em um meio paramagnético, os momentos se alinham e produzem uma **magnetização macroscópica** no mesmo sentido de \mathbf{B} . (*)
- Este efeito compete com a desordem introduzida pela temperatura.
- Este fenômeno é análogo ao alinhamento de moléculas polares em um campo elétrico externo (lembre que $\tau_{res} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$)!

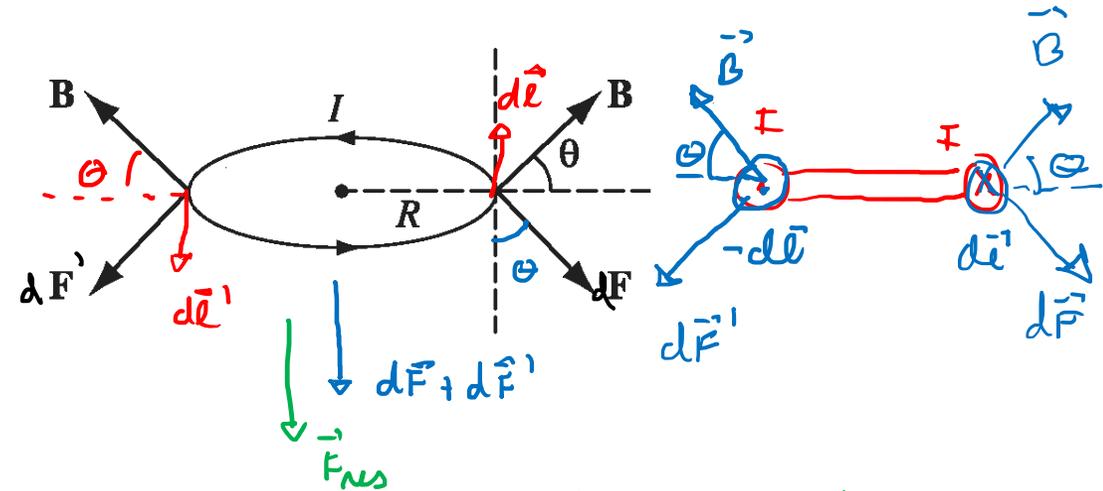


(ii) Movimento em campo não-uniforme

Neste caso, a força magnética resultante sobre uma espira pode ser não-nula! Vejamos um exemplo:



Contribuições de elementos de corrente em posições diametralmente opostas para a força magnética ($d\mathbf{F}_m = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$):



Portanto, a força resultante deve apontar para baixo neste caso e tem caráter atrativo!

O que ocorreria se invertêssemos o sentido da corrente na espira? E no solenoide?

↳ força repulsiva!

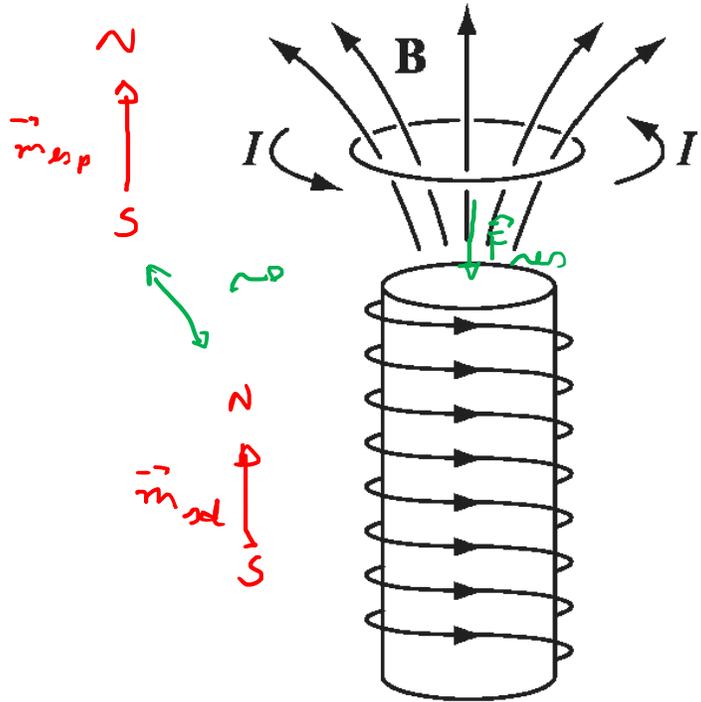
$$dF = I dl B$$

$$dF_z = I dl B \cos\theta$$

$$F_z = \int_{\text{esp.}} dF_z = I B \cos\theta \int_{\text{esp.}} dl = I B \cos\theta \cdot 2\pi R //$$

Interpretação de Gilbert para \mathbf{m}

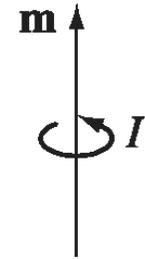
O resultado anterior sugere uma interpretação física simples, **mas imprecisa** para \mathbf{m} que nos permite atribuir polos magnéticos a um sistema:



(a) Magnetic dipole
(Gilbert model)



(b) Electric dipole



(c) Magnetic dipole
(Ampère model)

- Esta interpretação é útil para avaliarmos rapidamente o sentido da força entre dois objetos magnetizados em muitas situações.
- A imprecisão vem do fato que polos magnéticos separados **não** são observados na natureza, como já discutimos.

(iii) Dipolos puntiformes

Para um dipolo puntiforme, podemos verificar que:

- O torque com relação ao CM continua sendo dado por $\boldsymbol{\tau}_{res} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$ mesmo para \mathbf{B} não-uniforme.
- Para outros pontos, devemos somar a contribuição $\mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{F}_{res}$ à expressão acima.
- A força resultante sobre o dipolo em um campo não-uniforme pode ser escrita como (problema 6.4):

$$\mathbf{F}_{res} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$$

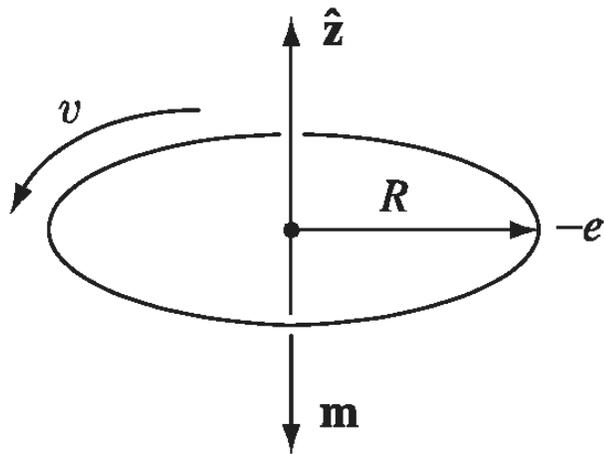
Note que o resultado é semelhante ao caso de um dipolo elétrico puntiforme ($\mathbf{F}_{res} = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E}$), mas há diferenças importantes entre as duas expressões (ver problema 6.5-c).

$$\begin{aligned} & \parallel \\ & = \vec{\nabla}(\hat{p} \cdot \vec{E}) \end{aligned}$$

$$\text{Em geral: } \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B}) \neq (\vec{m} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}!$$

6.1.3 – Efeito de um campo magnético externo em órbitas atômicas

Para ilustrar o fenômeno do diamagnetismo, vamos considerar o modelo clássico de Bohr para um átomo de Hidrogênio. Neste modelo, o elétron se desloca ao longo de um círculo de raio R em torno de um próton fixado na origem.



O movimento é sustentado pela força Coulombiana de atração entre o próton e o elétron (desprezando a força gravitacional).

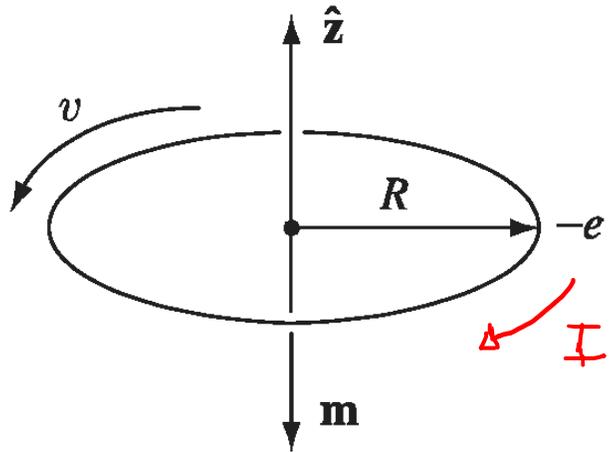
Pela 2ª lei de Newton:

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{F}_{res}$$
$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R^2} = \frac{m_e v^2}{R}$$

onde m_e é a massa do elétron.

Note que a velocidade escalar v é constante (MCU) e é determinada pelos parâmetros do problema.

- O movimento do elétron dá origem a uma corrente elétrica cujo sentido é contrário ao de sua velocidade (**por que?**).
- Como o período de revolução T é muito pequeno, podemos trata-la como uma corrente estacionária de intensidade:



$$I \approx \frac{e}{T} = \frac{e}{\frac{2\pi R}{v}} = \frac{ev}{2\pi R}$$

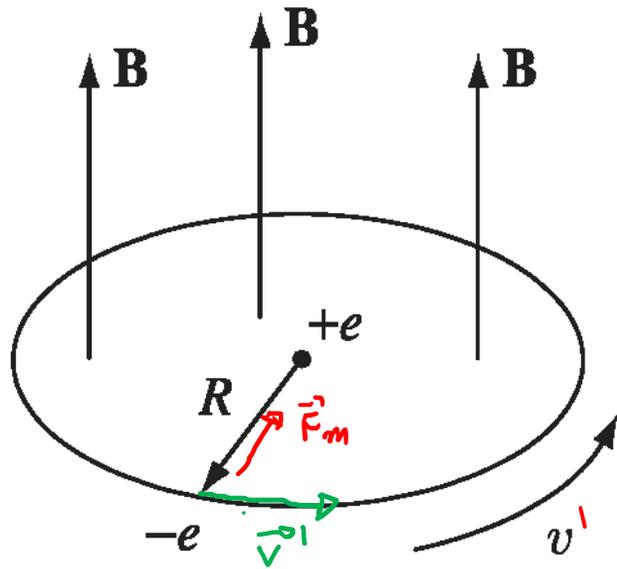
Esta corrente dá origem a um momento de dipolo magnético dado por:

$$\mathbf{m} = -I \pi R^2 \hat{\mathbf{z}} = -\frac{evR}{2} \hat{\mathbf{z}}$$

Vamos agora supor que o átomo está sob a ação de um campo magnético $\mathbf{B} = B\hat{z}$.

Neste caso, o elétron estará sob a ação da força elétrica e da magnética. Note que ambas serão radiais!

Pela 2ª lei de Newton:



$$\mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m = \mathbf{F}_{res}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R^2} + ev'B = \frac{m_e v'^2}{R}$$

$$\frac{m_e v^2}{R} + ev'B = \frac{m_e v'^2}{R}$$

onde v e v' é a velocidade escalar do elétron na ausência e na presença do campo, respectivamente. Note que assumimos (corretamente), que o raio R não se altera na presença do campo.

Rearranjando os termos, podemos escrever.

$$ev'B = \frac{m_e}{R} (v'^2 - v^2) = \frac{m_e}{R} (v' + v)(v' - v)$$

Assumindo que a variação de velocidade $\Delta v = v' - v$ é pequena, vemos que $v' + v \approx 2v$ e:

$$\Delta v = \frac{eBR}{2m_e}$$

Isto produzirá uma variação no momento de dipolo magnético dada por:

$$\Delta \mathbf{m} = -\frac{e\Delta v R}{2} \hat{\mathbf{z}} = -\frac{e^2 R^2}{4m_e} \mathbf{B}$$

Note que $\Delta \mathbf{m}$ tem sentido contrário a \mathbf{B} !

Observações:

- Verifique que o mesmo comportamento é observado ao invertemos o sentido de \mathbf{B} ou da velocidade do elétron.
- Na presença de um campo externo, cada átomo adquire um momento de dipolo magnético **adicional** em sentido contrário à \mathbf{B} .
- A magnetização macroscópica que resulta deste processo define a resposta diamagnética de um material!
- Note que o diamagnetismo está presente em todos os materiais, mas ele só é observado em materiais que não apresentam paramagnetismo ou ferromagnetismo, que são fenômenos mais intensos.
- O paramagnetismo está ausente em sistemas de camada fechada, que **não** apresentam momento de dipolo magnético microscópico na ausência de campos externos.
- Note a conexão entre o momento de dipolo magnético de um átomo e seu momento angular orbital e de spin (veja por exemplo o problema 5.56)

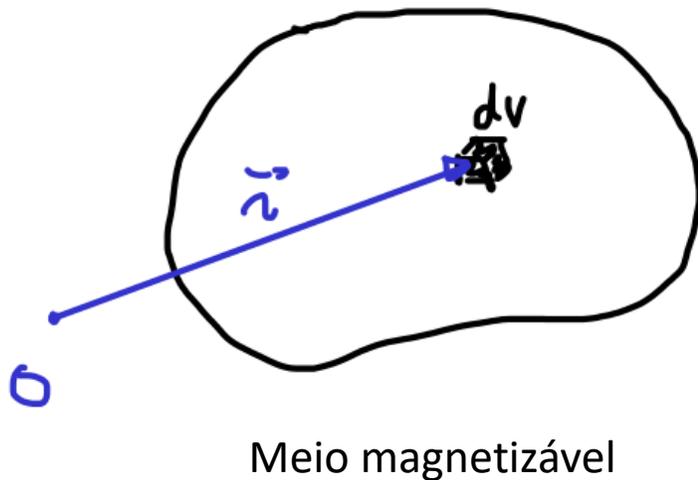


The diagram shows three boxes representing orbitals, each containing a pair of electrons (one with an upward arrow and one with a downward arrow). To the right of the diagram is the handwritten text $l=1 (p)$.

$$m_l = -1, 0, +1$$
$$L_x = L_y = 0, S_x = S_y = 0$$

6.1.4 – Magnetização

- Da mesma forma que no caso elétrico, **não** devemos esperar que as propriedades magnéticas de qualquer sólido possam ser descritas por uma simples superposição das propriedades de átomos isolados.
- Mesmo assim, podemos esperar que o sólido apresentará alguma magnetização na presença de campos magnéticos externos.



De forma análoga ao caso elétrico, podemos atribuir um momento de dipolo magnético infinitesimal a um elemento de volume infinitesimal:

$$d\mathbf{m} = \mathbf{M}(\mathbf{r})dv$$

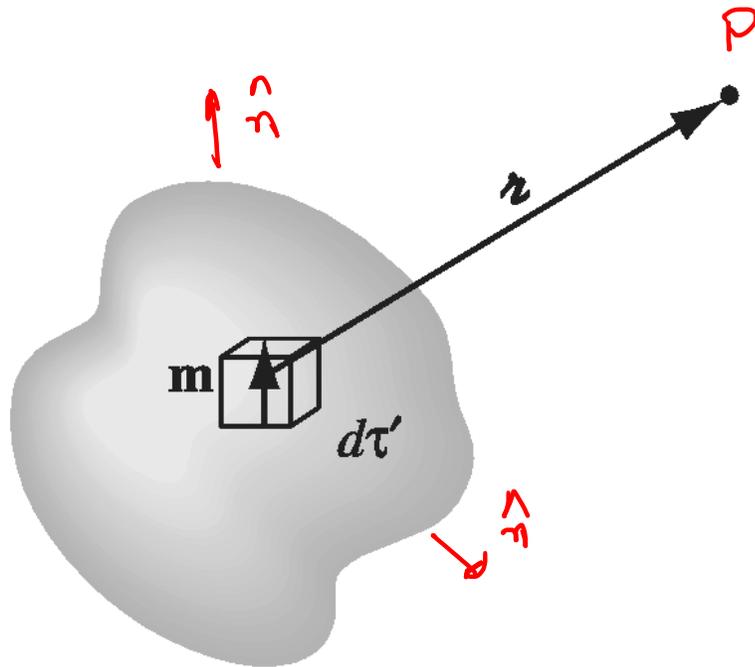
$$\rightsquigarrow d\vec{p} = \vec{P} dv$$

A função vetorial $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ é conhecida como **magnetização (macroscópica)**. Note que ela tem dimensão de momento de dipolo magnético por unidade de volume e pode ter um valor diferente para cada ponto do meio.

6.2 – Campo de um objeto magnetizado

6.2.1 – Correntes ligadas

Vamos supor agora que a magnetização $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ de um objeto é conhecida, sem nos preocuparmos com a sua origem. Como determinar o potencial vetor e o campo produzidos por este objeto?



Tratando $d\mathbf{m} = \mathbf{M}(\mathbf{r}')d\tau'$ como um dipolo puntiforme, sua contribuição para o potencial vetor no ponto P é:

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

E o potencial resultante é:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{dist} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} d\tau'$$

Vamos empregar um método similar ao utilizado no cap. 4 para obter uma forma alternativa para este resultado. Primeiro, note que:

$$\nabla' \frac{1}{r} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad \rightsquigarrow \quad \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = - \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

onde o gradiente atua sobre as coordenadas “com linha”. Com isso:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \left(\nabla' \frac{1}{r} \right) \right] dv'$$

Agora, vamos utilizar a seguinte regra de produto (7 na contracapa do livro-texto):

$$\nabla' \times \left[\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{r} \right] = \frac{1}{r} [\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')] - \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \left(\nabla' \frac{1}{r} \right)$$

Assim:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \int \frac{1}{r} [\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')] dv' - \int \nabla' \times \left[\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{r} \right] dv' \right\}$$

O 2º termo pode ser simplificado utilizando uma variação do teorema de Gauss vista no problema 1.61-b:

$$\int_V (\nabla' \times \mathbf{v}) dv' = - \oint_S \mathbf{v} \times d\mathbf{a}' \quad \vec{v} = \frac{\vec{M}}{r}$$

Com isso:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{r} \underbrace{[\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')]_{= \vec{J}_b(\vec{r}')}} dv' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{1}{r} \underbrace{[\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times d\mathbf{a}']_{= \vec{n} da'}}.$$

30

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J} dv'}{\text{dist.}^2}$$

20

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{K} da'}{\text{dist.}^2}$$

Este resultado pode ser escrito como:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}_b(\mathbf{r}')}{r} dv' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{K}_b(\mathbf{r}')}{r} da'$$

onde:

$$\boxed{\mathbf{J}_b(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r})}$$

e

$$\boxed{\mathbf{K}_b(\mathbf{r}) = \mathbf{M}(\mathbf{r}) \times \hat{\mathbf{n}}}$$

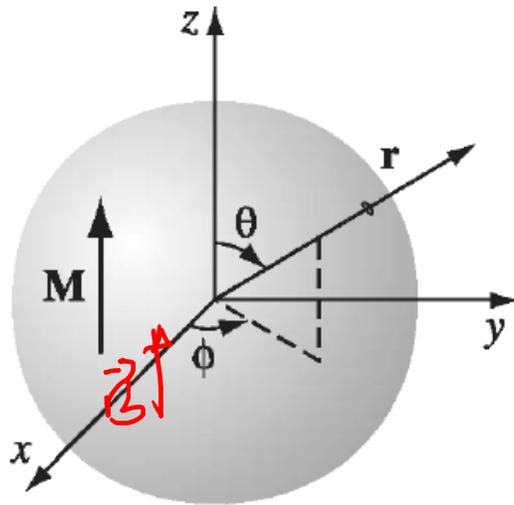
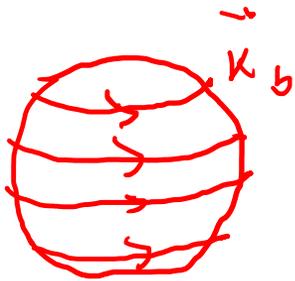
Portanto, o potencial vetor corresponde à soma dos potenciais produzidos por:

- Uma distribuição volumétrica de correntes ligadas definida por \mathbf{J}_b no volume do objeto.
- Uma distribuição superficial de correntes definida por \mathbf{K}_b na superfície do objeto.

Note a semelhança com o comportamento de um meio dielétrico polarizado: o potencial eletrostático correspondia à soma dos potenciais produzidos por uma distribuição volumétrica ($\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P}$) e uma superficial ($\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}$) de cargas ligadas!

Exemplo 6.1

Encontre o campo magnético de uma esfera uniformemente magnetizada.



$$\vec{M} = M \hat{z} = \text{cte}$$

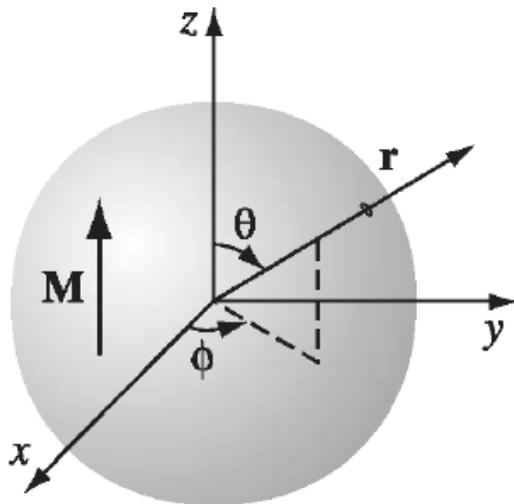
$$\vec{J}_b = \nabla \times \vec{M} = 0$$

$$\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{n}$$

$$= M \times \hat{n}$$

$$= M \sin\theta \hat{\phi}$$

Começamos determinando as correntes ligadas utilizando um sistema de coordenadas esféricas e $\mathbf{M} = M\hat{\mathbf{z}}$:



$$\mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{K}_b = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{r}} = M \sin \theta \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Resolvemos anteriormente um problema com a mesma forma de K_b acima: **o problema da casca esférica girante:**

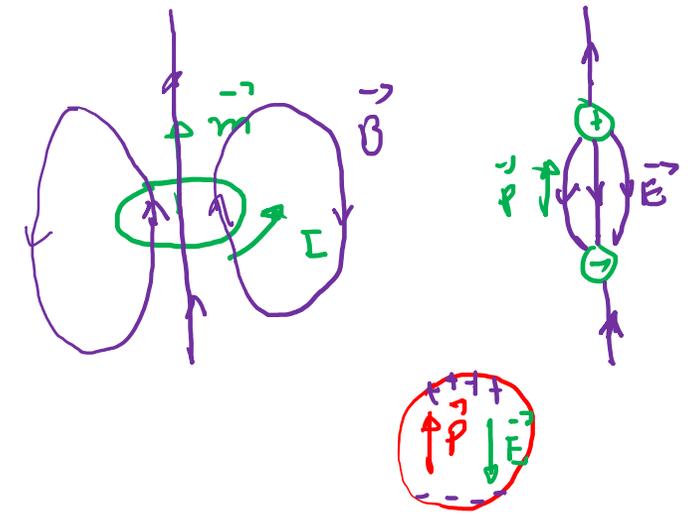
$$\mathbf{K} = \sigma \mathbf{v} = \sigma \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \sigma \omega R \sin \theta \hat{\boldsymbol{\phi}}$$



Temos exatamente o mesmo problema aqui com $\sigma \omega R \rightarrow M$!

Copiando o resultado daquele problema com esta modificação, obtemos:

$$\mathbf{A} = \begin{cases} \frac{\mu_0 M}{3} r \sin \theta \hat{\boldsymbol{\phi}}, & r < R \\ \frac{\mu_0 M R^3 \sin \theta}{3 r^2} \hat{\boldsymbol{\phi}}, & r > R \end{cases}$$



Dentro da esfera, o campo é uniforme:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{2\mu_0 M}{3} \hat{\mathbf{z}} = \frac{2\mu_0}{3} \mathbf{M}$$

No Cap. 4 ($\nabla \cdot \vec{P} = \rho_{\text{ext}}$)

$$\vec{E} = -\frac{1}{3} \frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$$

Note que este campo tem o mesmo sentido de \mathbf{M} ! Compare com o exemplo análogo no caso elétrico (esfera uniformemente polarizada) e discuta a diferença.

Fora da esfera, note que:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 M R^3 \sin \theta}{3 r^2} \hat{\phi} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

onde:

$$\mathbf{m} = \int_{esf} \mathbf{M} dv = \mathbf{M} \frac{4\pi R^3}{3}$$

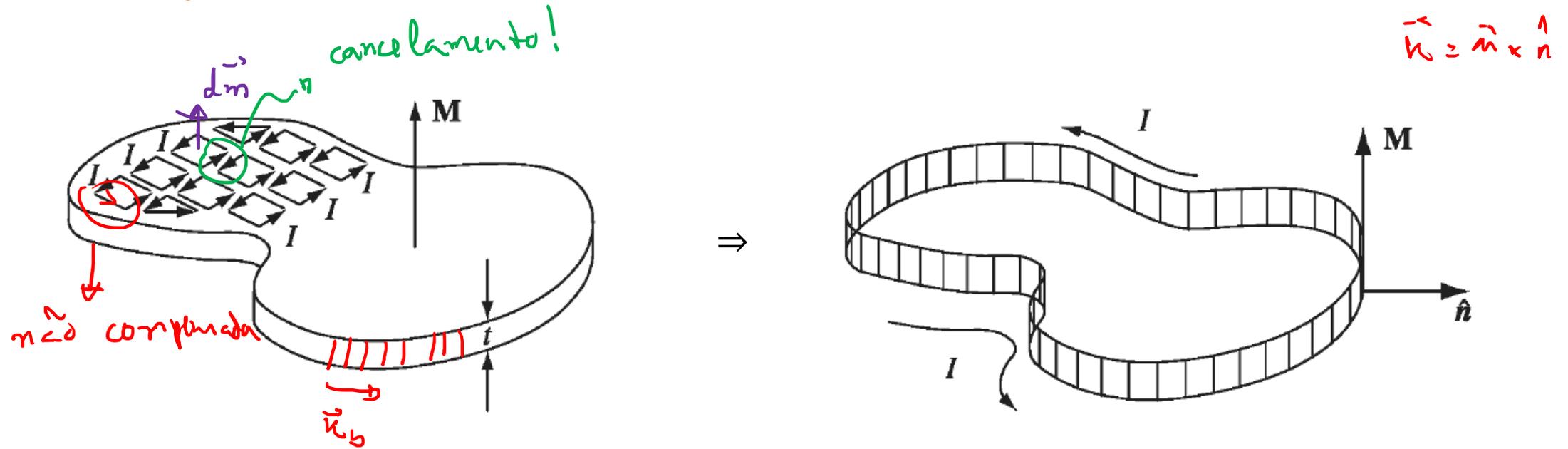
é o momento de dipolo magnético da esfera.

Portanto, nessa região **o potencial e o campo se reduzem ao de um dipolo magnético puntiforme \mathbf{m} !** Compare mais uma vez com o exemplo análogo na eletrostática.

6.2.2 – Interpretação física das correntes ligadas

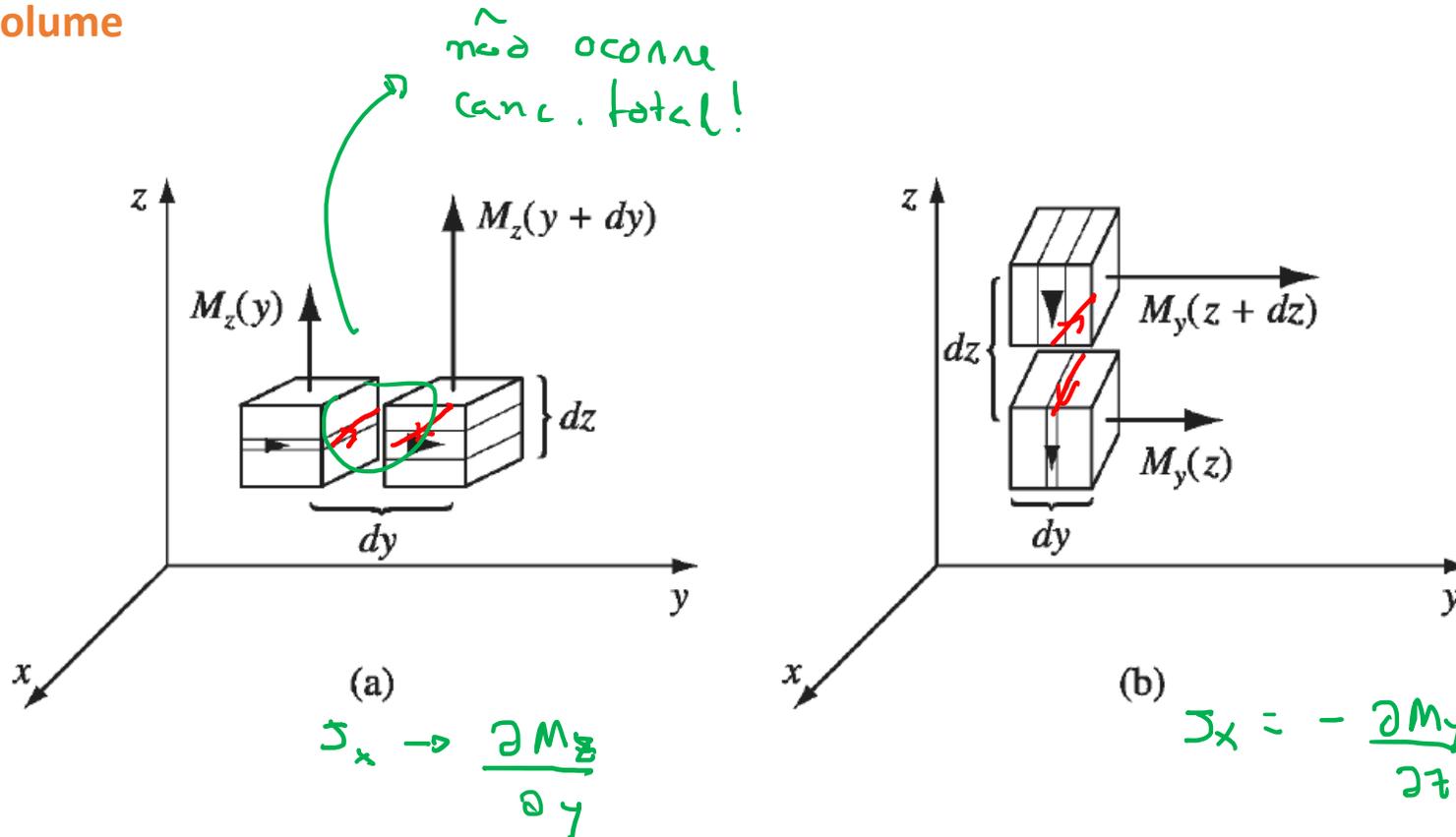
De maneira análoga ao caso elétrico, as correntes ligadas também possuem uma interpretação física clara.

(a) Correntes superficiais



- Podemos pensar na magnetização de um material como uma superposição de espiras de corrente infinitesimais.
- Se \mathbf{M} é uniforme, contribuições de espiras de corrente vizinhas se cancelam no volume do material, deixando apenas a superfície sem compensação. Esta é a origem física das correntes superficiais!

(b) Correntes de volume



- Se \mathbf{M} é não-uniforme, não haverá compensação entre espiras vizinhas dentro do material. Esta é a origem das correntes de volume!
- Note como variações de M_z ao longo de y e M_y ao longo de z produzem correntes ligadas ao longo de x . Isto sugere que de fato $\mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{M}$ (veja a demonstração completa no livro-texto).
- Note ainda que $\nabla \cdot \mathbf{J}_b = 0$, de forma que esta corrente é estacionária! **Por que isso já era esperado?**

Referências básicas

- Griffiths (3ª edição) – cap. 6
- Purcell – cap. 11

Leitura avançada

- Zangwill – seções 13.1, 13.2 e 13.3